САМАРСКИЙ ДВОРЕЦ ДЕТСКОГО И ЮНОШЕСКОГО ТВОРЧЕСТВА

САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

РЕШЕНИЯ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ SAMRAS-2014 СРЕДИ УЧАЩИХСЯ 8-9 КЛАССОВ ЗАОЧНОГО ТУРА № 2

Задачи подготовил:

Филиппов Юрий Петрович,
научный руководитель школы,
старший преподаватель кафедры
общей и теоретической физики
Самарского государственного
университета, к.ф.-м.н.

Самара, 2014 г.

Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «Метеор потока Персеиды»

Условие. В ночь с 12 на 13 августа 2013 года на обсерватории ДООЦ «Жигули» Бахтиным П.И. при участии Гришина К.А. была получена фотография (см. рис. 1) одного из многочисленных метеоров потока Персеиды. Объясните физическую причину данного явления. Можно ли данное явление наблюдать на Луне? (3 балла).

Рис. 1.

Решение:

Как известно, ***Метеор*** – это атмосферное явление (явление "падающей звезды"), возникающее при сгорании в атмосфере Земли *метеороидов* – малых пылевых или ледяных частиц. В свою очередь, метеороиды образуются при разрушении их "старших собратьев" – комет или астероидов. Если блеск метеора превосходит блеск Венеры (-4^m), то такое явление называется ***болидом***.

Метеороиды, как правило, входят в атмосферу Земли на больших скоростях ($\sim 11 \div 72$ км/с), что приводит к интенсивному трению частиц о встречные потоки атмосферного воздуха и их быстрому нагреву. При повышении температуры ускоряются химические реакции окисления (взаимодействия веществ метеороида с атмосферным кислородом), при очень высоких температурах эти реакции сопровождаются горением. Как известно, всякое тело, нагретое до высокой температуры способно излучать видимый свет. Именно этим фактом объясняется свечение продуктов горения метеороида в атмосфере.

Метеоры следует отличать от метеоритов и метеороидов. Метеор – это не объект (то есть метеороид), а явление, то есть светящийся след метеороида. И это явление называется метеором независимо от того, улетит ли метеороид из атмосферы обратно в космическое пространство, сгорит ли в ней за счет трения или упадет на Землю *метеоритом.*

Данное явление невозможно наблюдать в принципе на Луне, поскольку на Луне нет атмосферы.

Ответ: Причина данного явления – вхождение в атмосферу метеороидов на больших скоростях, как следствие, их трение о встречные потоки воздуха и разогрев вещества метеороидов до высоких температур (сопровождающееся горением), в результате чего возникает свечение продуктов горения. Данное явление невозможно наблюдать в принципе на Луне, поскольку на Луне нет атмосферы. ($\$_{\max} = 3$ балла).

Задача № 2. «Палитра цветов метеора и радиант потока Персеиды»

Условие. Как известно, явление метеора сопровождается образованием светящейся полоски – *трека*. Используя цветную фотографию метеора из потока Персеиды, укажите на (распечатанной) копии данной фотографии а) начало и конец трека (т.е. направление распространения вспышки), б) направление (приблизительно) на радиант данного потока. Как можно объяснить различие в цвете разных частей трека? (3 балла).

Решение:

Направление распространения вспышки легко распознать по профилю трека. Если внимательно присмотреться, то на фотографии можно увидеть, что один край трека имеет затупленный конец – это конец трека, другой – заостренный, с размытыми границами – это начало трека (тогда становится очевидным направление распространения вспышки, указано на рис. 2 пунктирной линией). Поясним это подробнее.

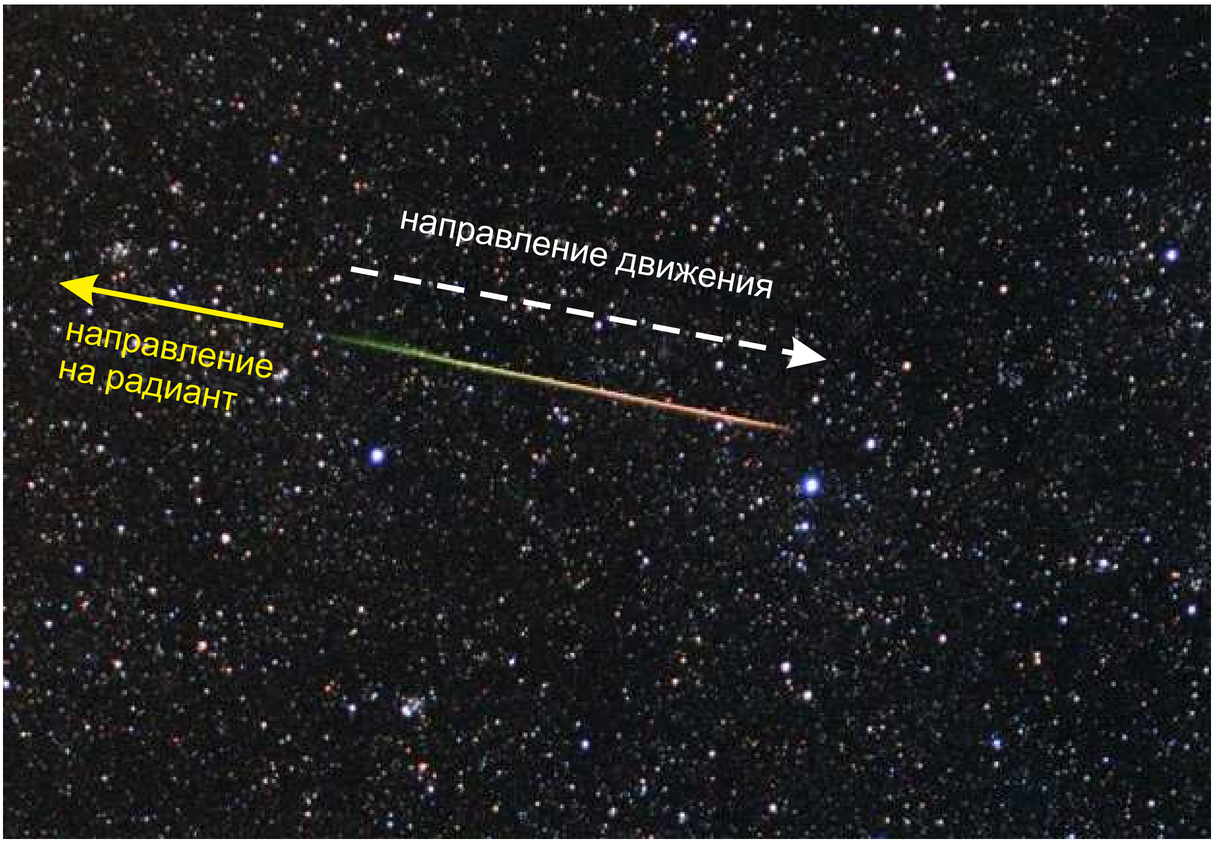

Рис. 2.

Как было отмечено в решении предыдущей задачи, ***метеор*** – это явление, обусловленное движением космической частицы с большой скоростью в атмосфере Земли. При этом встречные потоки воздуха "сгущаются" с фронтальной стороны частицы, увлекаясь последней и образуют *голову метеора* (едва заметное утолщение с затупленной границей). При движении в атмосфере на частицу действует сила сопротивления атмосферы, которая совершает работу. При этом механическая энергия частицы переходит в тепловую энергию как частицы, так и встречных потоков воздуха. Воздух в голове нагревается до высоких температур и начинает светиться. При этом часть горячих газов "срывается" с частицы и остается позади нее, образуя хвост. Данный газ быстро остывает и перестает светиться, именно поэтому хвост метеора острый и не имеет четкой границы.

Палитра цветов от темно-зеленого (хвост) до бурого (голова) обусловлена различием температур воздуха и продуктов горения, оставленных частицей, на различных участках своей траектории. При вхождении частицы в атмосферу Земли ее скорость максимальна, следовательно, и сила сопротивления и ее работа максимальна. Следовательно, в начале трека газы и продукты горения должны быть более горячими (зеленый цвет). По мере продвижения в атмосфере скорость частицы падает, а с ней падает температура потоков воздуха и продуктов горения, как следствие изменяется и цвет трека от зеленого до темно-красного (пробегая всю палитру радуги), соответствующего самому холодному светящемуся веществу.

Радиантом называется область небосвода, видимая для земного наблюдателя как источник метеоров. Следовательно, направление на радиант – это направление, обратное направлению его движению (указано на рис. 2 непрерывной стрелкой).

Задача № 3. «"Пробуждение" межпланетного КА "Rosetta"»

Условие. Космический межпланетный аппарат (зонд) Rosetta с 2004 года летит к комете 67P/Чурюмова-Герасименко. В целях экономии энергии и сохранности оборудования, аппарат был почти полностью выключен 8 июня 2011 года. 20 января 2014 года зонд самостоятельно запустил процедуру пробуждения, включил передатчик и вышел на связь с Землей. При этом расстояние до зонда составляло 670 млн. км. Определите какое полное количество суток (без учета дат включения и выключения КА) аппарат был в *состоянии гибернации* (спячки)? Сколько времени (в часах, минутах и секундах) шел сигнал от аппарата до наземной станции дальней космической связи. (3 балла).

Дано:
$r = 6.7 \cdot 10^{11}$ м,

Найти:
N_d – ?
t_m – ?

Решение:

Время движения сигнала определяется указанным расстоянием и скоростью радиосигнала (света) в вакууме ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с):

$$t_m = \frac{r}{c} = \frac{6.7 \cdot 10^{11}\,(\text{м})}{3 \cdot 10^8\,(\text{м/с})} = 2.233 \cdot 10^3\,(\text{с}) = 37\,\text{мин}\,13\,\text{с}.$$

Для расчета полного количества суток N_d, которые аппарат провел полностью в состоянии гибернации, учтем что промежуток времени с 9 июня 2011 года по 8 июня 2012 года включает в себя 366 дней (ибо 2012 год был високосным), с 9 июня 2012 года по 8 июня 2013 года – 365 суток, 22 сут в гибернации КА провел в июне 2013 года, 31 сут – в июле 2013 года, 31 сут – в августе 2013 года, 30 сут – в сентябре 2013 года, 31 сут – в октябре 2013 года, 30 сут – в ноябре 2013 года, 31 сут – в декабре 2013 года и 19 сут – в январе 2014 года. Т.о.

$$N_d = 366 + 365 + 22 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 19 = 956\,\text{сут}.$$

Ответ: $N_d = 956$ сут аппарат провел в состоянии гибернации; $t_m = 37\,\text{мин}\,13\,\text{с}$ шел сигнал от аппарата до наземной станции дальней космической связи. ($\$_{\max} = 3$ балла).

Задача № 4. «О протяженности г. Самара вдоль меридиана»

Условие. Как известно, протяженность г. Самара вдоль меридиана составляет 50 км. На сколько отличается географические широты самой северной и самой южной точки города? На сколько будет отличаться высота Солнца в верхней кульминации для наблюдателей в этих точках? В расчетах следует полагать, что Земля есть шар радиуса $\Re_\oplus = 6371$ км. (4 балла).

Дано:
$\ell = 50$ км,
$\Re_\oplus = 6371$ км.

Найти:
$\Delta\varphi$, $\Delta h_\odot$ - ?

Решение:

Пусть точка S_N – самая северная точка г. Самара, а S_S – самая южная его точка (см. рис. 3). Географические широты данных точек, откладываемые вдоль меридиана от экватора Q_1Q_2, равны φ_N, φ_S соответственно. Разность географических широт $\Delta\varphi = \varphi_N - \varphi_S$. Последний угол соответствует дуге окружности $\ell = 50$ км. С другой стороны, окружность меридиана длиной $L = 2\pi\Re_\oplus$, отвечает углу в 360°.

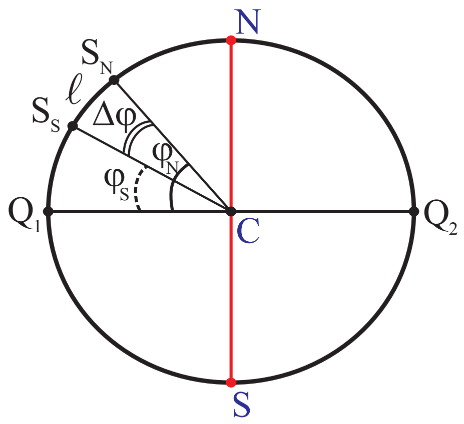

Рис. 3.

Составим пропорцию:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &\;\to\; \ell, \\ 360^\circ &\;\to\; L, \;\Rightarrow \Delta\varphi = 360^\circ\left(\frac{\ell}{L}\right), \\ \Delta\varphi &= 360^\circ\left(\frac{\ell}{2\pi\mathfrak{R}_\oplus}\right) = 0.450^\circ = 26'59''. \; (1) \end{aligned}$$

Высота Солнца в верхней кульминации для наблюдателей в данных точках запишется в виде:

$$\begin{aligned} &h_\odot^{(N)} = 90^\circ - \varphi_N + \delta_\odot, \\ &h_\odot^{(S)} = 90^\circ - \varphi_S + \delta_\odot, \;\Rightarrow \\ &\Delta h_\odot = h_\odot^{(S)} - h_\odot^{(N)} = \varphi_N - \varphi_S = \Delta\varphi = 26'59''. \; (2) \end{aligned}$$

Ответ: географические широты самой северной и самой южной точки г. Самара будут отличаться на $\Delta\varphi = 360^\circ\,(\ell/2\pi\mathfrak{R}_\oplus) = 0.450^\circ = 26'59''$; высота Солнца в верхней кульминации в самой южной точке города будет больше на $\Delta h_\odot = 26'59''$ высоты светила в самой северной точке города. ($\$_{\max} = 4$ балла).

Задача № 5. «Площадь территории г. Самара»

Условие. Как известно, площадь территории г. Самара составляет 541 км^2. Полагая, что Земля есть шар радиуса $\mathfrak{R}_\oplus = 6371$ км, оцените долю, которую составляет указанная площадь от а) площади поверхности всей Земли и б) площади суши, если последняя составляет 29.2% от площади всей поверхности Земли. (4 балла).

Дано:
$\xi = 0.292$,
$S_s = 541$ км^2,
$\mathfrak{R}_\oplus = 6371$ км.
Найти:
η_1, η_2 – ?

Решение:

Доля, которую составляет площадь территории г. Самара от площади поверхности всей Земли можно представить в виде:

$$\eta_1 = \frac{S_s}{S_\oplus}, \;\; \text{где} \;\; S_\oplus = 4\,\pi\,\mathfrak{R}_\oplus^2,$$

где $S_\oplus$ – площадь поверхности Земли-шара. Подставляя данные задачи в последнюю формулу в итоге получаем $\eta_1 = 1.061 \cdot 10^{-6} = 1.061 \cdot 10^{-4}\%$.

Аналогично можно определить долю, которую составляет площадь территории г. Самара от площади суши земной поверхности:

$$\eta_2 = \frac{S_s}{S_{\text{суша}}} = \frac{\eta_1}{\xi} = 3.632 \cdot 10^{-6} = 3.632 \cdot 10^{-4}\%, \;\; \text{где} \;\; S_{\text{суша}} = \xi \cdot S_\oplus.$$

Ответ: $\eta_1 = S_s/S_\oplus = 1.061 \cdot 10^{-6} = 1.061 \cdot 10^{-4}\%$, где $S_\oplus = 4\,\pi\,\mathfrak{R}_\oplus^2$; $\eta_2 = \eta_1/\xi = 3.632 \cdot 10^{-6} = 3.632 \cdot 10^{-4}\%$. ($\$_{\max} = 4$ балла).

Задача № 6. «"Черная звезда" Мичелла»

Условие. Концепция массивного тела, гравитационное притяжение которого настолько велико, что скорость, необходимая для преодоления этого притяжения (вторая космическая скорость), равна или превышает скорость света, впервые была высказана в 1784 году Джоном Мичеллом в письме, которое он послал в Королевское общество. Письмо содержало расчет, из которого следовало, что для тела с радиусом в 500 солнечных радиусов и с плотностью Солнца вторая космическая скорость на его поверхности будет равна скорости света. Свет не сможет покинуть это тело, и оно будет невидимым. Определите массу "Черной звезды" Мичелла в единицах массы Солнца и в кг. (5 баллов).

Дано:	**Решение:**
$\mathfrak{R}_* = 500\,\mathfrak{R}_\odot$, $\rho_* = \rho_\odot$.	Определим искомую величину двумя альтернативными способами.
Найти: $m_{\max}$ – ?	<u>Способ № 1.</u> Как известно, плотность солнечного вещества и вещества "Черной звезды" можно представить в виде:

$$\rho_\odot = \frac{\mathfrak{M}_\odot}{\frac{4}{3}\pi\,\mathfrak{R}_\odot^3},\ \ \rho_* = \frac{\mathfrak{M}_*}{\frac{4}{3}\pi\,\mathfrak{R}_*^3},\ \Rightarrow\ \frac{\mathfrak{M}_\odot}{\mathfrak{R}_\odot^3} = \frac{\mathfrak{M}_*}{\mathfrak{R}_*^3},\ \Rightarrow\ \mathfrak{M}_* = \left(\frac{\mathfrak{R}_*}{\mathfrak{R}_\odot}\right)^3 \mathfrak{M}_\odot. \quad (3)$$

здесь учтено, что объем звезды-шара есть

$$V_s = \frac{4}{3}\pi\,\mathfrak{R}^3. \quad (4)$$

В итоге $\mathfrak{M}_* = 1.25 \times 10^8 \times \mathfrak{M}_\odot = 2.5 \cdot 10^{38}$ кг ($\mathfrak{M}_\odot = 1.989 \cdot 10^{30}$ кг – масса Солнца).

<u>Способ № 2.</u> Воспользуемся определением второй космической скорости для звезды:

$$V_{II} = \sqrt{\frac{2\,G\,\mathfrak{M}_*}{\mathfrak{R}_*}} = c,\ \Rightarrow\ \mathfrak{M}_* = \frac{\mathfrak{R}_*\,c^2}{G} = \frac{5 \cdot 10^2 \cdot (6.961 \cdot 10^8) \cdot 9 \cdot 10^{16}}{2 \cdot 6.673 \cdot 10^{-11}}\,\text{кг} = 2.35 \cdot 10^{38}\ \text{кг}. \quad (5)$$

Следует отметить, что результат, полученный вторым способом, является более точным, поскольку здесь использовалось лишь одно определение и не задействована плотность, которая в случае массивных тел (таких как черная дыра) связана с массой несколько иначе – с использованием некоторого дополнительного множителя (не учтенного в первом случае).

<u>Ответ:</u> $\mathfrak{M}_* = 1.25 \times 10^8 \times \mathfrak{M}_\odot = 2.35 \cdot 10^{38}$ кг $\approx 2.50 \cdot 10^{38}$ кг. (5 баллов).

Уровень «Знаток» (уровень B)

Задача № 7. «Вид Солнца в окрестности Плутона»

<u>Условие.</u> Как известно, период обращения Плутона вокруг Солнца равен 246 годам. Сможет ли космонавт будущего, находящийся в окрестности данной планеты невооруженным глазом увидеть Солнце? Увидеть как неточечный объект? Если не сможет, то каково должно быть минимальное увеличение телескопа, который необходим космонавту, чтобы увидеть Солнце как неточечный объект? Разрешающую способность и проницающую силу человеческого глаза полагать равными $1'$ и 6^m соответственно. (6 баллов).

Дано:	**Решение:**
$T_P = 246$ лет, $\beta_y = 1' = 60''$, $m_y = 6^m$.	Для ответа на первый вопрос необходимо определить видимую звездную величину $m_\odot^{(P)}$, которую будет иметь Солнце в окрестности Плутона, и сравнить полученный результат с проницающей силой глаза космонавта m_y. Для определения $m_\odot^{(P)}$ воспользуемся законом обратных квадратов для освещенностей,
Найти: сможет ли? D_{ob} – ?	создаваемых излучением Солнца у поверхности Плутона ($E_\odot^{(P)}$) и Земли ($E_\odot^{(E)}$):

$$\frac{E_\odot^{(E)}}{E_\odot^{(P)}} = \left(\frac{r_P}{a_\oplus}\right)^2. \quad (6)$$

Здесь $a_\oplus$, r_P – гелиоцентрические расстояния Земли и Плутона. Для определения расстояния r_P воспользуемся значением периода обращения и третьим законом Кеплера:

$$\left(\frac{r_P}{a_\oplus}\right)^3 = \left(\frac{T_P}{T_\oplus}\right)^2,\ \Rightarrow\ \frac{E_\odot^{(E)}}{E_\odot^{(P)}} = \left(\frac{r_P}{a_\oplus}\right)^2 = \left(\frac{T_P}{T_\oplus}\right)^{4/3} = 1541,\ \ r_P = 39.26\ \text{а.е.} \quad (7)$$

Как известно, разность в 5^m отвечает отношению освещенностей в $(2.512)^5 = 100$ раз. Нетрудно убедиться, что число 1541 весьма близко к значению $(2.512)^8 = 1585$, следовательно, звездная величина Солнца в окрестности Плутона приблизительно на 8^m больше чем в окрестности Земли. В результате звездная величина Солнца $m_\odot^{(P)} = m_\odot^{(E)} + 8^m = -26.8^m + 8^m = -18.8^m < 6^m$. Т.о., космонавт увидит Солнце невооруженным глазом, при этом Солнце будет выглядеть ярче полной луны почти в 250 раз.

Для ответ на второй вопрос задачи необходимо определить угловой диаметр Солнца для космонавта в окрестности Плутона и сравнить полученный результат с разрешающей способностью человеческого глаза. Угловой диаметр Солнца можно определить в виде:

$$D''_{\odot,\,P} = 2 \cdot 206265'' \cdot \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathfrak{R}_\oplus}{r_P}\right) \approx 2 \cdot 206265'' \times \left(\frac{\mathfrak{R}_\oplus}{r_P}\right). \tag{8}$$

Здесь $\mathfrak{R}_\oplus = 6.961 \cdot 10^8$ м – радиус Солнца. Аналогичное соотношение можно записать для космонавта в окрестности Земли:

$$D''_{\odot,\,E} \approx 2 \cdot 206265'' \times \left(\frac{\mathfrak{R}_\oplus}{a_\oplus}\right) = 1920''. \tag{9}$$

Поделив (8) на (9) в результате получаем

$$\frac{D''_{\odot,\,P}}{D''_{\odot,\,E}} = \frac{a_\oplus}{r_P}, \;\; \Rightarrow \;\; D''_{\odot,\,P} = D''_{\odot,\,E}\left(\frac{a_\oplus}{r_P}\right) = 49'' < 60''.$$

Следовательно, космонавт не сможет увидеть Солнце как неточечный объект. Тогда для этой задачи космонавту необходим телескоп, минимальное увеличение которого есть

$$\Gamma_{\min} = \frac{\beta_y}{D''_{\odot,\,P}} = 1.23^\times.$$

Ответ: космонавт увидит Солнце невооруженным глазом как точечный объект, при этом Солнце будет выглядеть ярче полной луны ≈ 250 раз; $\Gamma_{\min} = \frac{\beta_y}{D''_{\odot,\,P}} = 1.23^\times$. (6 баллов).

Задача № 8. «Гипотеза об источнике энергии Солнца и ее несостоятельность»

Условие. До конца XIX в. некоторые ученые полагали, что источником энергии Солнца являются химические реакции горения, в частности горение угля. Полагая, что теплота горения угля $q = 10^7$ Дж/кг, масса Солнца $\mathfrak{M}_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг, а его светимость $L_\odot = 3.8 \cdot 10^{26}$ Вт, докажите строго математически несостоятельность данной гипотезы. (7 баллов).

Дано:
$q = 10^7$ Дж/кг,
$\mathfrak{M}_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг,
$L_\odot = 3.8 \cdot 10^{26}$ Вт.

Найти:
док-во.

Решение:

Выполним доказательство "от противного". Предположим, что данные ученые правы и пусть Солнце целиком состоит из угля, следовательно, суммарное количество энергии которое при сгорании всего Солнца есть

$$Q_{\mathrm{tot}} = q \cdot \mathfrak{M}_\odot = 2 \cdot 10^{37} \text{ Дж}.$$

Полагая, что светимость Солнца все время τ_{life} его жизни оставалась постоянной, можно вычислить указанный параметр:

$$\tau_{\mathrm{life}} = \frac{Q_{\mathrm{tot}}}{L_\odot} = 5.3 \cdot 10^{10}\, c = 1672 \text{ года}.$$

Однако, даже история человечества насчитывает большее количество лет, в течение которого светимость Солнца практически не менялась. Следовательно, процесс горения угля не может быть источником энергии Солнца.

Задача № 9. «Свойства нейтрона, радиус и плотность нейтронной звезды»

Условие. Как известно, размер нейтрона составляет 10^{-15} м, а его масса $1.7 \cdot 10^{-27}$ кг. Используя эти данные, оцените радиус и плотность нейтронной звезды с массой $\mathfrak{M}_* = 2\,\mathfrak{M}_\odot$, где $\mathfrak{M}_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг – масса Солнца. (8 баллов).

Дано:
$D_n = 10^{-15}$ м,
$m_n = 1.7 \cdot 10^{-27}$ кг,
$\mathfrak{M}_* = 2\,\mathfrak{M}_\odot$.

Найти:
$\mathfrak{R}_*$ – ?

Решение:
Как известно, нейтронная звезда – это небесное тело с очень высокой плотностью, состоящей из плотно "упакованных" нейтронов, среднее расстояние между которыми равно диаметру нейтрона. Следовательно, концентрацию нейтронов можно представить в виде:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{1}{D_n^3} = 10^{45}\ \text{м}^{-3}. \qquad (10)$$

Плотность нейтронной материи представляется в виде:

$$\rho_n = m_n \cdot n = 1.7 \cdot 10^{18}\ \text{кг/м}^3.$$

Массу нейтронной звезды тогда можно представить как

$$\mathfrak{M}_* = \rho_n \cdot V_* = \frac{4}{3}\,\pi\,\rho_n\,\mathfrak{R}_*^3, \ \Rightarrow\ \mathfrak{R}_* = \sqrt[3]{\frac{3\,\mathfrak{M}_*}{4\,\pi\,\rho_n}} = D_n\,\sqrt[3]{\frac{3\,\mathfrak{M}_*}{4\,\pi\,m_n}} = 8.25\,\text{км} \approx 10\,\text{км}. \qquad (11)$$

Т.о. нейтронные звезды – компактные объекты, размеры которых ~ 10 км.

Ответ: $\mathfrak{R}_* = D_n\,\sqrt[3]{\frac{3\,\mathfrak{M}_*}{4\,\pi\,m_n}} = 8.25\,\text{км} \approx 10\,\text{км}$. ($\$_{\max} = 8$ баллов).

Задача № 10. «Наблюдения Эратосфена и определение длины земного меридиана»

Условие. В III в. до н.э. греческий ученый Эратосфен знал, что в день летнего солнцестояния Солнце над г. Сиена бывает так высоко, что его лучи достигают дна самого глубокого колодца этого города. В это же время в г. Александрия, расположенном примерно на том же меридиане, Солнце было на высоте $h_2 = 82.8°$. Эратосфен определил расстояние между Сиеной и Александрией. Для этого он учел, что караван верблюдов обычно проходил около 100 греческих стадий в сутки (в те времена люди передвигались на верблюдах). Путешествие каравана из Сиены в Александрию занимало 50 дней. Опираясь, на указанные данные и учитывая, что одна стадия равна 157 метрам, определите длину дуги (окружности) земного меридиана в стадиях и километрах. Сравните полученный результат с современным значением и определите относительную погрешность результата Эратосфена. (8 баллов).

Дано:
$h_2 = 82.8°$,
$v_k = 100$ стадия/сут,
$t_p = 50$ сут.

Найти:
L, ε_L – ?

Решение:
Если лучи достигают дна самого глубокого колодца г. Сиена, значит они падают нормально поверхности, следовательно высота Солнца в этот день – $h_1 = 90°$. Запишем высоту Солнца в верхней кульминации для г. Сиена (1), и г. Александрия (2).

$$h_1 = 90° - \varphi_1 + \delta_\odot,\ \ h_2 = \left\{\begin{array}{l} 90° - \varphi_2 + \delta_\odot, \\ 90° + \varphi_2 - \delta_\odot \end{array}\right\},\ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \varphi_1 = \delta_\odot, \\ |\varphi_2 - \varphi_1| = 90° - h_2 \end{array}\right\}.$$

Отметим, что в последнем выражении представлены два альтернативных результата для высоты светила в верхней кульминации в г. Александрия – к югу и северу от зенита соответственно (поскольку не сказано, к югу или северу от зенита была кульминация Солнца). Т.о. разность географических широт данных городов составляет $\Delta\varphi = |\varphi_2 - \varphi_1| = 7.2°$, данному углу соответствует дуга меридиана ℓ (для большей наглядности см. рис. 3), которую преодолевает караван, путешествуя из одного города в другой. Последний параметр представляется в виде:

$$\ell = v_k \cdot t_p = 5000\,\text{стадий}.$$

С другой стороны, окружность меридиана длиной $L = 2\pi\mathfrak{R}_\oplus$, отвечает углу в 360°. Составим пропорцию:

$$\left\{ \begin{array}{c} \Delta\varphi \to \ell, \\ 360^\circ \to L \end{array} \right\}, \;\Rightarrow L = \ell\left(\frac{360^\circ}{\Delta\varphi}\right) = 2.50\cdot10^5\,\text{стадий} = 39250\,\text{км}.$$

Современные исследования дают длину меридиана $L_0 = 40008$ км. Следовательно, относительную погрешность в определении длины меридиана определим как

$$\varepsilon_L = \left(\frac{L_0 - L}{L_0}\right)\cdot 100\% = 1.9\%,$$

что для того времени было очень хорошей точностью определения L.

Ответ: $L = \ell\left(\frac{360^\circ}{\Delta\varphi}\right) = 2.50\cdot10^5$ стадий $= 39250$ км; $\varepsilon_L = 1.9\%$. ($\$_{\max} = 8$ баллов).

Задача № 11. «О двух астероидах и элонгации»[1]

Условие. Два астероида A и B имеют одинаковый синодический период, равный 420 суток (при наблюдении с Земли). Известно, что большая полуось астероида A меньше большой полуоси астероида B. Найти максимальную элонгацию (α) астероида A при наблюдении с астероида B. Орбиты астероидов считать круговыми. (9 баллов).

Дано:
$S_1 = S_2 = 420$ сут $= 1.15$ года,
$a_A < a_B$.

Найти:
m_2 – ?

Решение:
Равенство синодических периодов и неравенство больших полуосей орбит астероидов, легко объясняется, если один из астероидов расположен ближе к Солнцу, чем Земля, а другой – дальше нее. Важно отметить, что оба астероида обращаются вокруг Солнца в туже сторону, что и Земля, иначе бы их синодический период был бы меньше периода обращения Земли. Запишем уравнение для синодического периода в случае нижнего (астероид A) и верхнего тела (астероид B):

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_\oplus}, \;\Rightarrow\; T_A = \frac{S\,T_\oplus}{(S + T_\oplus)} = \frac{S}{(S+1)}.$$

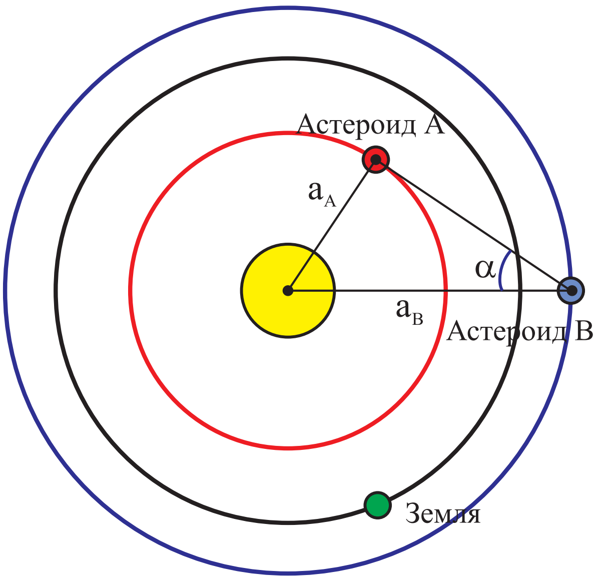

Рис. 4.

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_\oplus} - \frac{1}{T_B}, \;\Rightarrow\; T_B = \frac{S\,T_\oplus}{(S - T_\oplus)} = \frac{S}{S-1},$$

здесь T_A, T_B – сидерические периоды обращения астероидов вокруг Солнца, и учтено, что $T_\oplus = 1$ год – сидерический период обращения Земли. Согласно 3-му закону Кеплера отношение больших полуосей орбит астероидов есть:

$$\frac{a_A}{a_B} = \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^{2/3} = \left(\frac{S-1}{S+1}\right)^{2/3}. \tag{12}$$

Из рис. 4, очевидно, что синус угла максимальной элонгации астероида A для воображаемого наблюдателя, находящегося на астероиде B, определяется отношением больших полуосей орбит астероидов:

$$\sin\alpha = \frac{a_A}{a_B} = \left(\frac{S-1}{S+1}\right)^{2/3} = \left(\frac{1.15-1}{1.15+1}\right)^{2/3} = 0.1695, \;\Rightarrow\; \alpha = 9.8^\circ. \tag{13}$$

[1]Условие и решение задачи представлены Гришиным К., учащимся 10 класса Лицея № 57 г. Тольятти.

Ответ: $\sin\alpha = \left(\frac{S-1}{S+1}\right)^{2/3}$, $\alpha = 9.8°$. ($\$_{\max} = 9$ баллов).

Задача № 12. «Размеры и плотность самой легкой "обнаруженной" черной дыры»

Условие. В 2003 году внимание астрономов привлекла двойная система IGR J17091, находящаяся в созвездии Скорпиона, – они зафиксировали здесь яркую рентгеновскую вспышку. Последующие исследования этой системы показали, что она состоит из "нормальной" звезды и черной дыры, которая постепенно "перетягивает" на себя газ с компаньона. Используя космический телескоп RXTE (Rossi X-ray Timing Explorer), они смогли измерить частоту рентгеновских импульсов от черной дыры и вычислить ее массу, которая оказалась близкой к минимально возможной массе черной дыры ($\mathfrak{M}_{BH} = 3\,\mathfrak{M}_\odot$), образующейся на финальной стадии эволюции звезды. Эта черная дыра имеет минимальную массу, среди всех черных дыр, обнаруженных косвенными методами на данный момент. Определите радиус этой черной дыры (радиус Шварцшильда) и ее среднюю массовую плотность. Как зависит последний параметр от массы $\mathfrak{M}_{BH}$? (10 баллов).

Дано:
$\mathfrak{M}_{BH} = 3\,\mathfrak{M}_\odot$.

Найти:
$\rho_{\text{BH}}(\mathfrak{M}_{BH})$ – ?
$\mathfrak{R}_{BH}$ – ?

Решение:

Как известно, ***черная дыра*** (ЧД) – область четырехмерного пространства-времени, гравитационное притяжение которой настолько велико, что покинуть ее не могут даже объекты, движущиеся со скоростью света, в том числе кванты самого света. Граница этой области называется ***горизонтом событий***, а ее характерный размер – ***гравитационным радиусом*** или ***радиусом Шварцшильда***. Последний можно определить из условия, что на горизонте событий вторая космическая скорость ЧД равна скорости света:

$$V_{II} = \sqrt{\frac{2\,G\,\mathfrak{M}_{\text{BH}}}{\mathfrak{R}_{BH}}} = c, \;\Rightarrow\; \mathfrak{R}_{BH} = \frac{2\,G\,\mathfrak{M}_{\text{BH}}}{c^2} = \frac{6.673\cdot10^{-11}\cdot 3\cdot 1.989\cdot10^{30}}{9\cdot10^{16}}\,\text{м} = 8.848\,\text{км}. \tag{14}$$

Среднюю массовую плотность определим выражением

$$\rho_{\text{BH}} = \frac{\mathfrak{M}_{\text{BH}}}{V_{\text{BH}}} = \frac{\mathfrak{M}_{\text{BH}}}{\frac{4}{3}\pi\mathfrak{R}_{BH}^3} = \frac{3c^6}{32\pi G^3\,\mathfrak{M}_{BH}^2} = \frac{c^6}{96\pi G^3\,\mathfrak{M}_\odot^2} = 2.06\cdot10^{18}\,\text{кг/м}^3. \tag{15}$$

Из последнего результата следует интересный факт – чем больше масса черной дыры, тем меньше ее средняя массовая плотность (гиперболическая зависимость – $\rho_{\text{BH}} \sim 1/\mathfrak{M}_{BH}^2$).

Ответ: $\mathfrak{R}_{BH} = \frac{2\,G\,\mathfrak{M}_{\text{BH}}}{c^2} = 8.848$ км, $\rho_{\text{BH}} = \frac{3c^6}{32\pi G^3\,\mathfrak{M}_{BH}^2} = 2.06\cdot10^{18}$ кг/м^3. ($\$_{\max} = 10$ баллов).

Уровень «Профи» (уровень C)

Задача № 13. «Фотография группы солнечных пятен»

Условие. В период с 8 по 14 августа 2013 года на обсерватории ДООЦ «Жигули» Бахтиным П.И. при участии Гришина К.А. были проведены наблюдения Солнца, в частности, была получена фотография (см. рис. 5) группы солнечных пятен. Используя данную фотографию и данные о Солнце, оцените линейный и угловой диаметр (для земного наблюдателя) тени и полутени самого большого солнечного пятна. (11 баллов).

Решение:

Прежде всего, определим угловой (μ_a) и линейный (μ_ℓ) масштаб фотографии следующими выражениями:

$$\mu_a = \frac{\rho''_\odot}{R_\odot}, \quad \mu_\ell = \frac{\mathfrak{R}_\odot}{R_\odot}, \tag{16}$$

Рис. 5.

где $\rho''_{\odot} = 15.996'$ – средний угловой радиус Солнца, $\mathfrak{R}_{\odot} = 6.961 \cdot 10^5$ км – линейный радиус Солнца, полученные по данным наблюдений профессионалов, $R_{\odot}$ – линейный радиус Солнца, измеренный по фотографии.

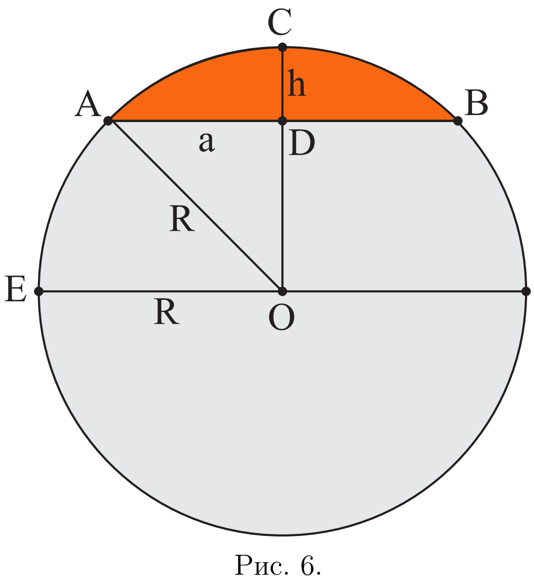

Рис. 6.

К сожалению, измерить непосредственно радиус видимого диска Солнца по фотографии не представляется возможным. Поэтому будем для этого использовать несложную методику косвенного определения $R_{\odot}$. Рассмотрим круг радиуса R и круговой сегмент $ACBDA$, с высотой h и основанием $AB = 2a$ (см. рис. 6). Из треугольника $\triangle ADO$ по теореме Пифагора следует, что

$$R^2 = a^2 + (R - h)^2, \;\Rightarrow\; R = \frac{(a^2 + h^2)}{2h}.$$

Т.о. для определения радиуса круга необходимо знать высоту h кругового сегмента и половину его основания – a. Выполним дополнительное построение на данной фотографии. Проведем через нижнюю точку C части видимого диска (см. рис. 7) касательную. Проведем параллельную ей прямую, через крайнюю правую точку A диска Солнца. Опустим из точки C на нее перпендикуляр CD. В результате мы получаем половину кругового сектора $ACDA$, для которого $h_{\odot} = CD$, $a_{\odot} = AD$ и, следовательно,

$$R_{\odot} = \frac{(a_{\odot}^2 + h_{\odot}^2)}{2h_{\odot}}. \tag{17}$$

Определяя по фотографии значения $a_{\odot} = 19$ см, $h_{\odot} = 4$ см (ваши значения могут отличаться

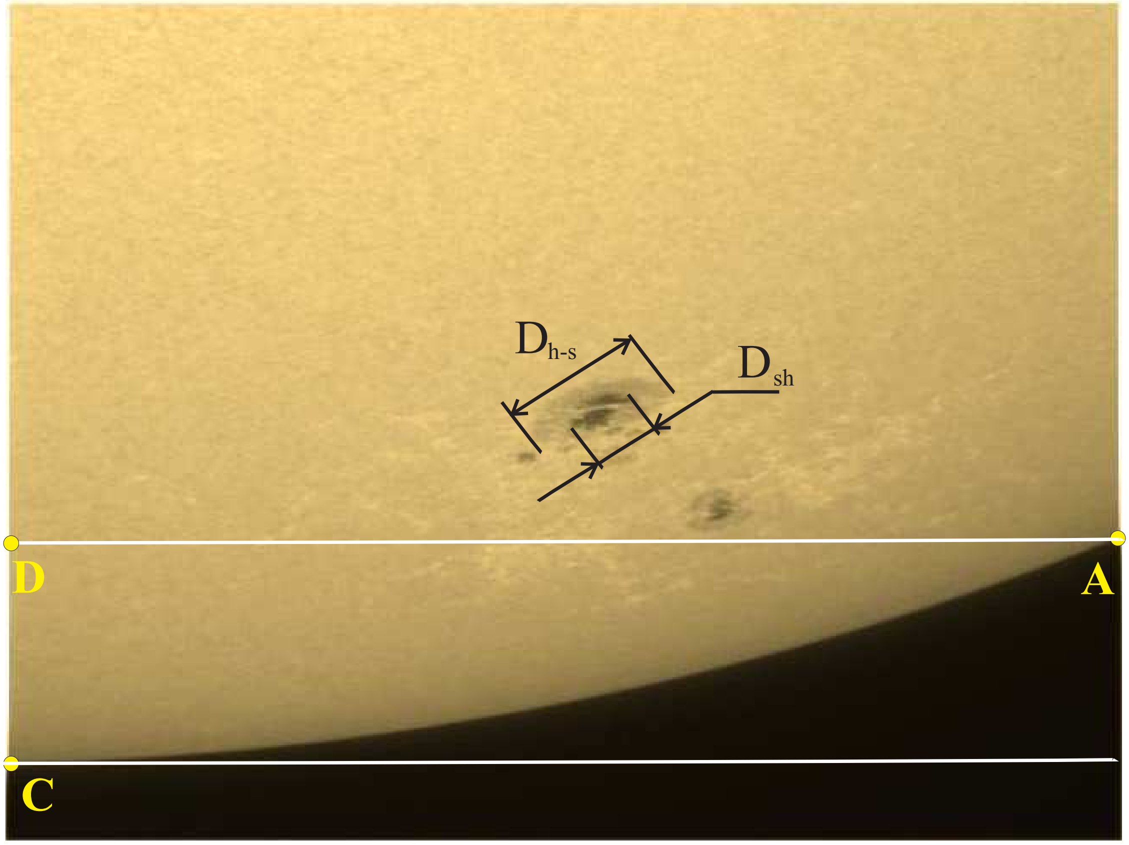

Рис. 7.

от указанных, в зависимости от формата используемой фотографии), в итоге получаем $R_\odot = 47.125$ см. Тогда угловой и линейный масштаб фотографии представляются значениями $\mu_a = 20.4''/\text{см}$, $\mu_\ell = 14771$ км/см.

Как известно, структура солнечного пятна определяется двумя основными областями – ***областью тени*** – наиболее холодной и темной частью пятна и ***полутенью*** – областью, окружающей тень в виде тусклой волокнистой каймы. По рисунку определяем диаметр тени – $D_{\text{sh}} = 1.2$ см и полутени – $D_{\text{h-s}} = 2.5$ см. Тогда угловой и линейный диаметры тени и полутени представляются в виде:

$$d''_{sh} = \mu_a \cdot D_{\text{sh}} = 24.5'', \;\; d''_{h-s} = \mu_a \cdot D_{\text{h-s}} = 51'',$$

,

$$d_{sh} = \mu_\ell \cdot D_{\text{sh}} = 17725\,\text{км}, \;\; d_{h-s} = \mu_\ell \cdot D_{\text{h-s}} = 36928\,\text{км}.$$

Ответ: $d''_{sh} = 24.5''$, $d''_{h-s} = 51''$,; $d_{sh} = 17725$ км, $d_{h-s} = 36928$ км. ($\$_{\max} = 11$ баллов).

Задача № 14. «Коррекция орбиты АМС и ее орбитальный период»[1]

Условие. Автоматическая межпланетная станция (АМС) обращается вокруг Солнца по круговой орбите. В результате коррекции орбиты (для избежания столкновения с астероидом), орбитальный (сидерический) период АМС T увеличился на малую величину ΔT, (причем $\Delta T \ll T$, орбита осталась круговой), при этом синодический период АМС изменился на ту же величину ΔT. Найти орбитальный период T обращения АМС. Большая полуось орбиты АМС больше большой полуоси Земли, направления обращения Земли и АМС совпадают. (12 баллов).

Дано:	Решение:
$\Delta T = \Delta S$, $a_\oplus < a$.	Воспользуемся уравнением синодического периода для двух ситуаций: а) до корректировки орбиты:
Найти: T – ?	

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_\oplus} - \frac{1}{T}, \;\; \Rightarrow \;\; S = \frac{T\,T_\oplus}{T - T_\oplus}. \tag{18}$$

где S – синодический период АМС; $T_\oplus$ – сидерический период обращения Земли вокруг Солнца, T – сидерический период обращения АМС вокруг Солнца;

б) после корректировки орбиты:

$$\frac{1}{S-\Delta T}=\frac{1}{T_\oplus}-\frac{1}{T+\Delta T},\;\Rightarrow\; S=\Delta T+\frac{(T+\Delta T)T_\oplus}{T-T_\oplus+\Delta T}. \tag{19}$$

здесь мы учли, что при увеличении сидерического периода АМС, ее синодический период должен уменьшаться. Пусть $x=(\Delta T/T)\ll 1$, тогда из уравнений (18) и (19) следует

$$\frac{T\,T_\oplus}{T-T_\oplus}=T\,x+\frac{T\,T_\oplus(1+x)}{T-T_\oplus+x\,T},\;\Rightarrow\;\frac{T\,T_\oplus}{T-T_\oplus}=\frac{T^2(x^2+x)+T\,T_\oplus}{T-T_\oplus+x\,T},\;\Rightarrow$$

$$T_\oplus(T-T_\oplus+x\,T)=(T-T_\oplus)(T(x^2+x)+T_\oplus),\;\Rightarrow\; x(T^2-2T\,T_\oplus)=0.$$

при получении последнего выражения мы учли, что $x\ll 1$, и слагаемыми, пропорциональными x^2, можно пренебречь.

Решениями последнего неполного квадратного уравнения являются 2 корня: $T=0$ лет (не физический корень) и $T=2\,T_\oplus=2$ года. Т.о. искомый период будет составлять два года.

Ответ: $T=2\,T_\oplus=2$ года. ($\$_{\max}=12$ баллов).

Задача № 15. «Минимальная масса реликтовой квантовой черной дыры»

Условие. Согласно современной теории эволюции ранней Вселенной, в первые моменты после Большого взрыва последняя представляла собой "кипящий суп из пространства, времени и реликтовых черных дыр". Последние должны были возникнуть непосредственно при образовании Вселенной из-за флуктуаций плотности. Исследования физиков-теоретиков показывают, что размеры такой реликтовой черной дыры не могут быть меньше некоторого предельного значения – ***планковской длины*** (L_P) – фундаментальной единицы длины, определяющей минимально возможное расстояние, на котором понятия пространства и длины еще существуют. Опираясь на приведенные прогнозы, с использованием явного вида для L_P (следует самостоятельно найти явное выражение для данного параметра в литературе), оцените минимальную массу и соответствующую массовую плотность реликтовой квантовой черной дыры. (13 баллов).

Дано:
$D_{BH}^{(\min)}\geq L_P.$
Найти:
$\rho_{\rm BH}$ – ?
$\mathfrak{M}_{BH}^{(\min)}$ – ?

Решение:

Согласно условию задачи, размеры реликтовой черной дыры (далее будем полагать радиус – $\mathfrak{R}_{BH}$) не могут быть меньше планковской длины L_P (явное выражение для данного параметра можно найти, например, в Wikipedia, "Планковская длина"), т.е.

$$\mathfrak{R}_{BH}\geq L_P,\;\text{ где }\; L_P=\sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}=1.616\cdot 10^{-35}\,\text{м}. \tag{20}$$

где $\hbar=1.055\cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка, $G=6.673\cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 – гравитационная постоянная; $c=2.998\cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме.

Далее рассмотрим предельный случай равенства величин:

$$\mathfrak{R}_{BH}=\sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}},\;\Rightarrow\;\frac{2\,G\,\mathfrak{M}_{\rm BH}^{(\min)}}{c^2}=\sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}},\;\Rightarrow\;\mathfrak{M}_{\rm BH}^{(\min)}=\sqrt{\frac{\hbar\,c}{4G}}=1.09\cdot 10^{-8}\,\text{кг}. \tag{21}$$

здесь мы учли, что радиус черной дыры определяется выражением (14).

Среднюю массовую плотность определим выражением

$$\rho_{\rm BH}=\frac{\mathfrak{M}_{\rm BH}^{(\min)}}{V_{\rm BH}}=\frac{\mathfrak{M}_{\rm BH}^{(\min)}}{\frac{4}{3}\pi\mathfrak{R}_{BH}^3}=\frac{3c^6}{32\pi G^3\,\mathfrak{M}_{BH}^2}=\frac{3}{8\pi}\frac{c^5}{\hbar\,G^2}=6.15\cdot 10^{95}\,\text{кг/м}^3. \tag{22}$$

Следует отметить, именно такую плотность имела наша Вселенная в первые мгновения своего существования.

Ответ: $\mathfrak{M}_{\text{BH}}^{(\min)} = \sqrt{\dfrac{\hbar c}{4G}} = 1.09 \cdot 10^{-8}$ кг, $\rho_{\text{BH}} = \dfrac{3}{8\pi} \dfrac{c^5}{\hbar G^2} = 6.15 \cdot 10^{95}$ кг/м^3. ($\$_{\max} = 13$ баллов).

Задача № 16. «Открытие Э. Хаббла и возраст Вселенной»

Условие. В 1929 году американским астрофизиком Э. Хабблом было открыто *явление разбегания галактик* (расширение Вселенной) и установлен одноименный закон – ***закон Хаббла***, ключевым параметром в котором является постоянная Хаббла ($H = 67.80$ км/(с· Мпк)). Предполагая, что теория Большого взрыва верна и что расширение Вселенной все время ее существования происходило с постоянной скоростью, оцените ее время жизни. (13 баллов).

Дано:	***Решение:***
$H = 67.80$ км/(с· Мпк).	Согласно современным представлениям, наша Вселенная возникла в результате Большого взрыва из одной точки – сингулярности. В момент взрыва различные частицы материи (осколки, из которых потом формировались галактики) получили различные скорости. Те из них, которые получили бóльшие скорости, соответственно успели к настоящему моменту улететь дальше, чем те, которые получили меньшие скорости.
Найти: τ_{life} – ?	

Зависимость лучевой скорости движения галактики от расстояния до нее оказывается линейной и описывается законом Хаббла:

$$v_r = H \cdot r. \tag{23}$$

Эта зависимость одна и та же для всех точек пространства, то есть, по наблюдениям за разлетающимися осколками нельзя найти точку взрыва: с точки зрения каждого осколка, именно он находится в центре.

Следовательно, время движения какой-либо галактики от точки взрыва до настоящего положения есть τ_{life}, которое можно определить как

$$\tau_{\text{life}} = \frac{r}{v_r} = \frac{r}{H \cdot r} = \frac{1}{H} = \frac{1}{67.80}\,\text{Мпк·с/км}. \tag{24}$$

или

$$\tau_{\text{life}} = \frac{1}{67.80} \cdot 3.086 \cdot 10^{19}\ \text{км·с/км} = 4.55 \cdot 10^{17}\, c = 1.44 \cdot 10^{10}\ \text{лет} = 14.4\,\text{млрд. лет.}$$

здесь учтено, что 1 Мпк$= 3.086 \cdot 10^{19}$ км; 1 год $=3.156 \cdot 10^7$ с.

Ответ: $\tau_{\text{life}} = \dfrac{r}{v_r} = \dfrac{1}{H} = 14.4$ млрд. лет. ($\$_{\max} = 13$ баллов).

Задача № 17. «Российские ученые-полярники и феномен НЛО»

Условие. Российские ученые-полярники, возвращаясь из экспедиции по Северному ледовитому океану, наблюдали феномен НЛО. По словам очевидцев этот объект представлял собой яркий светящийся шар, который внезапно появился из под толщи арктического льда (с плотностью $\rho_{\text{ice}} = 920$ кг/м^3) толщиной 3 (м) и стал подниматься вертикально вверх с постоянной скоростью. Спустя 2 мин после появления он внезапно исчез. Полярники с помощью угломерного инструмента смогли определить скорость изменения его высоты вблизи горизонта – $v_h = 2$ град/с. Позже они смогли определить расстояние от своего корабля до места взлета НЛО, $r = 500$ м. На месте взлета аппарата была обнаружена полынья диаметром $D = 10$ м с оплавленными стенками. Оцените а) линейную скорость подъема НЛО, б) его линейную и угловую высоту точки исчезновения, в) его угловой диаметр в точке исчезновения, сравнить полученный результат с соответствующим значением для Солнца ($32'$); г) минимальную мощность теплового излучения НЛО. Сравните последний результат с мощностью, вырабатываемой самой мощной атомной электростанцией в мире, сделайте вывод. Следует отметить, что аппарат не испытывал никаких затруднений при прохождении толщи льда (удельная теплота плавления водяного льда $\lambda = 334$ кДж/кг). (14 баллов).

Дано:

$\rho_{\text{ice}} = 920$ кг/м^3,
$v_h = 2°$/с,
$\ell = 3$ м,
$t_{\text{lift}} = 2$ мин.
$r = 500$ м,
$D = 10$ м,
$D''_\odot = 32'$,
$\lambda = 334$ кДж/кг.

Найти:

V_{lift}, h, H – ?
D''_{UFO}, P_{min} – ?

Решение:

Согласно условию задачи, скорость подъема НЛО V_{lift} есть величина постоянная, т.о. она не меняется с высотой. Вблизи горизонта, где была определена скорость v_h изменения угловой высоты, движение НЛО можно рассматривать как движение по дуге окружности AB (см. рис. 8) радиуса $r + D/2$ (ибо здесь дуга окружности фактически совпадает с действительной траекторией аппарата). Тогда V_{lift} можно определить в виде:

$$V_{\text{lift}} = v_h \cdot (r + D/2) = \frac{2°\,\pi}{180°}\left(\frac{1}{c}\right) \cdot 505(\text{м}) = 17.6 \text{ м/с}. \tag{25}$$

здесь v_h – играет роль угловой скорости движения НЛО по дуге окружности AB. Зная скорость и время подъема, можно определить высоту подъема аппарата H:

$$H = V_{\text{lift}} \cdot t_{\text{lift}} = 2115\,\text{м}.$$

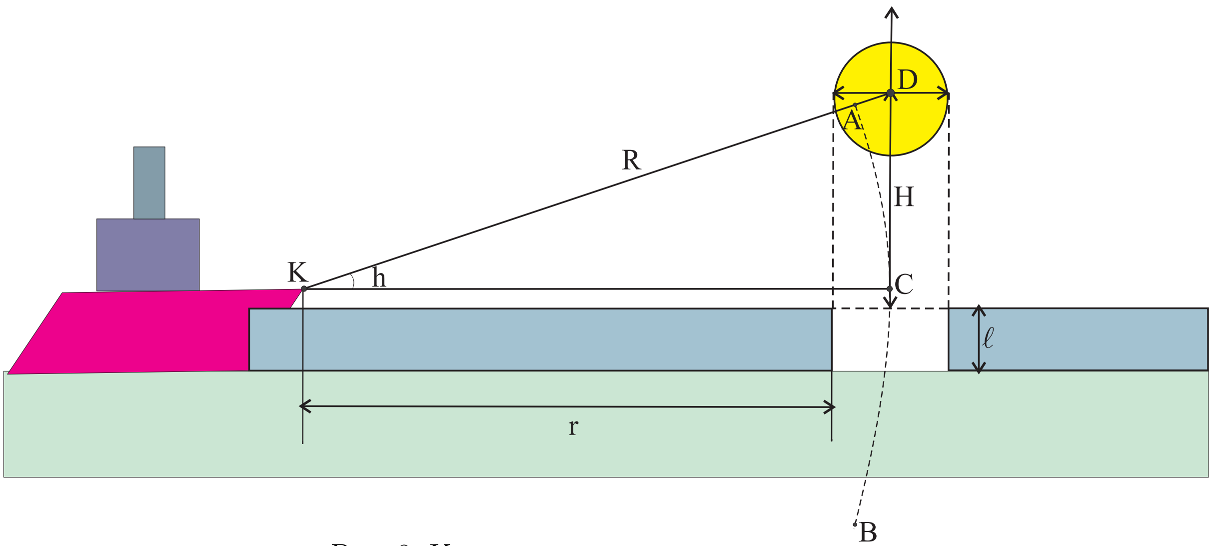

Рис. 8. К определению искомых величин.

используя значение последнего параметра, из треугольника $\triangle KCD$ можно оценить угловую высоту h точки исчезновения аппарата:

$$\operatorname{tg} h \approx \frac{H}{r + D/2}, \quad \Rightarrow \quad h = \operatorname{arctg}\left(\frac{H}{r + D/2}\right) = 77°.$$

По аналогии с формулой (8) можно определить угловой размер объекта в момент исчезновения:

$$D''_{\text{UFO}} = 2 \cdot 206265'' \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{D}{2\,R}\right) \approx \cdot 206265'' \times \left(\frac{D}{R}\right) \approx 16', \quad \text{где } R = \sqrt{(r + D/2)^2 + H^2} = 2174\,\text{м}.$$

Т.о. угловой диаметр НЛО был фактически в 2 раза меньше углового диаметра Солнца.

Для оценки P_{min} учтем, что при прохождении толщи льда аппарат затратил тепловую энергию как на плавление льда, так и на нагрев и испарение воды. Однако, вычислить последнюю энергию не представляется возможным ибо нечего не известно, о количествах нагретой и испаренной воды. Следовательно, P_{min} определим как мощность теплового излучения, затраченного лишь на плавление льда.

$$P_{\text{min}} = \frac{Q_{\text{melt}}}{\Delta t_{tr}}, \tag{26}$$

здесь Q_{melt} – теплота, затраченная лишь на плавление арктического льда, заполнявшего объем полости, Δt_{tr} – время непосредственного контакта НЛО со льдом. Очевидно, что

$$Q_{\text{melt}} = \lambda \cdot m_{\text{ice}} = \lambda \cdot \rho_{\text{ice}} \cdot V_{pol} = \lambda \cdot \rho_{\text{ice}} \cdot \ell \cdot \frac{\pi}{4} D^2 = 7.24 \cdot 10^{10} \text{ Дж}.$$

Время Δt_{tr}, определим из условия, что начало контакта НЛО со льдом происходит в момент, когда верхняя точка шара касается нижней границы ледового покрова океана, при этом центр шара находится ниже этой границы на величину $D/2$. Окончание контакта происходит в момент, когда центр шара находится на уровне верхней границы ледового покрова. Поскольку подъем совершался с постоянной скоростью V_{lift} даже в воде и во льду, то

$$\Delta t_{tr} = \frac{(D/2 + \ell)}{V_{\text{lift}}} = 0.45 \ c.$$

Тогда $P_{\min} = 1.6 \cdot 10^{11}$ Вт $= 160$ ГВт. По земным меркам – это колоссальная мощность, которая недостижима сегодня даже на передовых и самых мощных АЭС (Касивадзаки-Карива (Япония) – крупнейшая АЭС в мире по мощности находится в японском городе Касивадзаки префектуры Ниигата. В эксплуатации находятся пять кипящих ядерных реакторов и два улучшенных кипящих ядерных реакторов, суммарная мощность которых составляет 8.212 ГВт). Очевидно, что если этот летательный аппарат – продукт разумной цивилизации, то последняя обладает технологиями, которые не доступны человечеству в настоящее время.

Ответ: $V_{\text{lift}} = v_h \cdot (r + D/2) = 17.6$ м/с, $H = V_{\text{lift}} \cdot t_{\text{lift}} = 2115$ м, $h \approx \text{arctg}\left(\frac{H}{r+D/2}\right) = 77^\circ$, $D''_{\text{UFO}} \approx 16'$, $P_{\min} = 1.6 \cdot 10^{11}$ Вт. ($\$_{\max} = 14$ баллов).

Задача № 18. «Проект "Радиоастрон" и наблюдение сверхмассивной черной дыры»

Условие. 18 июля 2011 года стартовал международный космический проект ***Радиоастрон*** с ведущим российским участием, нацеленный на проведение фундаментальных астрофизических исследований в радиодиапазоне с помощью космического радиотелескопа «Спектр-Р» (см. рис. 9). Последний представляет собой космический аппарат-радиотелескоп, оснащенный приемной параболической антенной диаметром 10 метров, работающей в диапазоне длин волн $1.2 \div 96$ см, движущийся по геоцентрической орбите с большой полуосью $a = 1.89 \cdot 10^5$ км и эксцентриситетом $\varepsilon = 0.94$. Он является крупнейшим в мире космическим телескопом и образует вместе с наземными радиотелескопами *наземно-космический радиоинтерферометр со сверхдлинной базой.* Такой режим работы позволяет достичь сверхвыскокой разрешающей способности, которая определяется расстоянием между телескопами, а не размером антенн. Одной из главных целей проекта является изучение релятивистских струй, а также непосредственных окрестностей сверхмассивных черных дыр в галактиках. Определите для данного радиоинтерферометра минимальную и максимальную разрешающую способность. Может ли, в принципе, данный телескоп разрешить (т.е. увидеть как протяженный объект) окрестности сверхмассивной черной дыры галактики М31 (Туманность Андромеды), масса которой $(1.1 \div 2.3) \cdot 10^8\,\mathfrak{M}_\odot$. Расстояние до центра галактики $(7.72 \pm 0.44) \cdot 10^5$ пк. (15 баллов).

Рис. 9.

Решение:

Разрешающая способность обычного радиотелескопа ограничена явлением дифракции электромагнитных волн и определяется выражением вида:

$$\beta = 1.21 \left(\frac{\lambda}{D_T}\right), \tag{27}$$

Дано:

$D_T = 10$ м,
$\lambda = 1.2 \div 96$ см,
$a = 1.89 \cdot 10^5$ км,
$\varepsilon = 0.94$,
$\mathfrak{M}_{BH} = (1.1 \div 2.3) \cdot 10^8\, \mathfrak{M}_{\odot}$,
$r_{BH} = (7.72 \pm 0.44) \cdot 10^5$ пк

Найти:

$\beta_{\min}, \beta_{\max}$ – ?
сможет ли?

где λ – длина электромагнитной волны на которой работает данный телескоп, D_T – диаметр объектива телескопа. Как было отмечено в условии в случае радиоинтерферометров параметр β определяется уже не диаметром антенны, а расстоянием между антенами – базой (L). Поэтому Разрешающая способность радиоинтерферометра определяется выражением:

$$\beta = 1.21\left(\frac{\lambda}{L}\right). \tag{28}$$

Т.о. разрешающая способность радиоинтерферометра определяется лишь λ и L. Очевидно, что

$$\beta_{\min} = 1.21\left(\frac{\lambda_{\min}}{L_{\max}}\right), \quad \beta_{\max} = 1.21\left(\frac{\lambda_{\max}}{L_{\min}}\right). \tag{29}$$

где, согласно условию $\lambda_{\min} = 1.2 \cdot 10^{-2}$ м, $\lambda_{\min} = 0.96$ м.

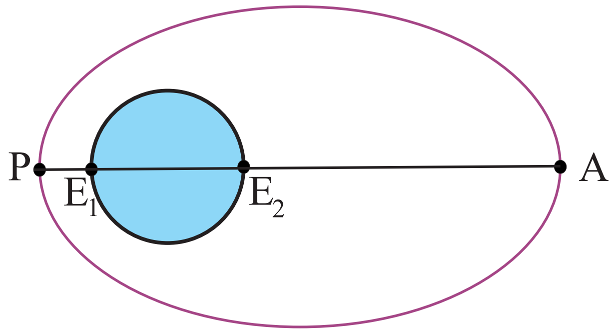

Рис. 10.

Согласно рис. 10, минимальное расстояние ($L_{\min}$) между космическим и наземным радиотелескопом достигается, когда первый находится в перигее (P) своей орбиты, а наземный под ним, – в точке E_1. При этом

$$L_{\min} = q - \mathfrak{R}_{\oplus} = a(1-\varepsilon) - \mathfrak{R}_{\oplus} = 4.969 \cdot 10^6 \text{ м},$$

где $q = a(1-\varepsilon)$ – геоцентрическое расстояние КА в перигее, $\mathfrak{R}_{\oplus} = 6.371 \cdot 10^6$ м – средний (по объему) радиус Земли.

Максимальное расстояние между телескопами будет в случае, когда КА находится в апогее (А) своей орбиты, а телескоп в точке E_1, тогда

$$L_{\max} = Q + \mathfrak{R}_{\oplus} = a(1+\varepsilon) + \mathfrak{R}_{\oplus} = 3.730 \cdot 10^8 \text{ м}.$$

В итоге

$$\beta_{\min} = 3.217 \cdot 10^{-11}\,\text{рад} = 6.64 \cdot 10^{-6}\,\text{угл. сек.}, \quad \beta_{\max} = 1.932 \cdot 10^{-7}\,\text{рад} = 3.98 \cdot 10^{-2}\,\text{угл. сек.}$$

Чтобы телескоп, в принципе, мог разрешить окрестности сверхмассивной черной дыры галактики М31, необходимо, чтобы $\beta_{\min} < D''_{BH}$, где D''_{BH} – угловой диаметр сверхмассивной черной дыры. По данным наблюдений определим интервал возможных значений D''_{BH}. С использованием формулы (8) имеем

$$D''_{BH\,\min} = 2 \cdot 206265'' \times \left(\frac{\mathfrak{R}^{(\min)}_{BH}}{r^{(\max)}_{BH}}\right), \quad D''_{BH\,\max} = 2 \cdot 206265'' \times \left(\frac{\mathfrak{R}^{(\max)}_{BH}}{r^{(\min)}_{BH}}\right). \tag{30}$$

Здесь $r^{(\min)}_{BH} = 7.28 \cdot 10^5$ пк $= 2.247 \cdot 10^{22}$ м, $r^{(\max)}_{BH} = 8.16 \cdot 10^5$ пк $= 2.518 \cdot 10^{22}$ м. С использованием формулы (14) определим минимальный ($\mathfrak{R}^{(\min)}_{BH}$) и максимальный ($\mathfrak{R}^{(\max)}_{BH}$) радиусы черной дыры:

$$\mathfrak{R}^{(\min)}_{BH} = \frac{2\,G\,\mathfrak{M}^{(\min)}_{\mathrm{BH}}}{c^2} = 3.262 \cdot 10^{11}\,\text{м} = 2.181\,\text{а.е.}, \tag{31}$$

$$\mathfrak{R}^{(\max)}_{BH} = \frac{2\,G\,\mathfrak{M}^{(\max)}_{\mathrm{BH}}}{c^2} = 6.821 \cdot 10^{11}\,\text{м} = 4.556\,\text{а.е.}. \tag{32}$$

Следовательно, $D''_{BH\,\min} = 5.34 \cdot 10^{-6}$ угл. сек, $D''_{BH\,\max} = 1.25 \cdot 10^{-5}$ угл. сек. Т.о., если наблюдения с КА "Спектр-Р" ведутся в окрестности его афелия, а масса сверхмассивной черной дыры выше среднего значения, то радиоинтерферометр сможет разрешить окрестности дыры.

Ответ: $\beta_{\min} = 6.64 \cdot 10^{-6}$ угл. сек., $\beta_{\max} = 3.98 \cdot 10^{-2}$ угл. сек.; если наблюдения с КА "Спектр-Р" ведутся в окрестности его афелия, а масса сверхмассивной черной дыры выше среднего значения, то радиоинтерферометр сможет разрешить окрестности дыры. ($\$_{\max} = 15$ баллов).